MỞ RỘNG KHÁI NIỆM SỐ PHỨC, NHỮNG VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Lê Hào
Trường Đại học Phú Yên
Email: lehao@pyu.edu.vn
Ngày nhận bài: 16/02/2024; Ngày nhận đăng: 03/06/2024

Tóm tắt

Chúng tôi đưa ra cấu trúc đại số $\mathbb{C}_3$ gồm các số phức mở rộng với hai phép toán, là sự mở rộng của các trường $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$. Kết quả mà chúng tôi đạt được không chỉ là nêu và chứng minh các tính chất liên quan đến $\mathbb{C}_3$ và áp dụng, mà còn chỉ ra một lớp các trường nằm trong $\mathbb{C}_3$ mà trường $\mathbb{C}$ thuộc vào lớp đó.

Từ khóa: *Cấu trúc đại số, số phức, số phức mở rộng, trường.*

Expanding the concept of complex numbers and some related issues

Le Hao
Phu Yen University
Received: February 16, 2024; Accepted: June 03, 2024

Abstract

We introduce an algebraic structure called $\mathbb{C}_3$,which is comprised of extended complex numbers with two operations, which are the extensions of the fields $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$. The results we achieve are not only to present and prove the properties related to $\mathbb{C}_3$ then apply them, but also indicate a class of fields in $\mathbb{C}_3$ to which field $\mathbb{C}$ belongs.

Keywords: *algebraic structure, complex number, extended complex number, field.*

1. Tập hợp các số phức mở rộng

Trên $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) /\ x_i \in \mathbb{R}\}$ ta xét các phép toán như sau:

$\forall z_1 = (a_1, b_1, c_1); \forall z_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$:

$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2,\ \ a_1b_2 + a_2b_1,\ \ a_1c_2 + a_2c_1)$$
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ \ b_1 + b_2,\ \ c_1 + c_2)$$

1.1. Định nghĩa: *Mỗi phần tử $z = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ được gọi là một số phức mở rộng.*

Tập hợp $\mathbb{R}^3$ cùng các phép toán trên được kí hiệu là $\mathbb{C}_3$, gọi là tập hợp các số phức mở rộng.

1.2. Quan hệ giữa $\mathbb{C}_3$ và các trường $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

1.2.1. $\mathbb{C}_3$ là sự mở rộng của trường $\mathbb{R}$

Ta xét ánh xạ sau:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}_3$$
$$\forall a \in \mathbb{R}:\ f(a) = (a, 0,0)$$

Rõ ràng f là đơn ánh và

$$f(a + b) \equiv f(a) + f(b)$$
$$f(ab) \equiv\ \ (ab, 0,0) \equiv (a, 0,0).(b, 0,0) \equiv f(a).f(b)$$

Điều đó cho thấy $\mathbb{C}_3$ là sự mở rộng của trường $\mathbb{R}$ và ta có thể đồng nhất:

$$(a, 0,0) \equiv a$$

Xem mỗi số phức mở rộng $(a, 0,0)$ là số thực a.

Nhận xét: $\forall a \in \mathbb{R}$; $\forall z = (b, c, d) \in \mathbb{C}_3$ ta có :

$$az = a.(b, c, d) = (ab, ac, ad)$$

1.2.2. $\mathbb{C}_3$ là sự mở rộng của trường $\mathbb{C}$

Ta xét ánh xạ sau:

$$g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}_3$$

$$\forall z = a + bi \in \mathbb{C}:\ g(z) = g(a + bi) = (a, b, 0)$$

Rõ ràng g là đơn ánh và với mọi $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ ta có:

$$g(z_1 + z_2) \equiv g(z_1) + g(z_2)$$

$$g(z_1 z_2) \equiv (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1, 0) \equiv (a_1, b_1, 0).(a_2, b_2, 0) \equiv g(z_1).g(z_2)$$

Điều đó cho thấy $\mathbb{C}_3$ là sự mở rộng của trường $\mathbb{C}$ và ta có thể đồng nhất:

$$(a, b, 0) \equiv a + bi$$

Xem mỗi số phức mở rộng $(a, b, 0) \in \mathbb{C}_3$ là số phức $a + bi$.

Đặc biệt $(0,1,0) \equiv i$ là đơn vị ảo trong trường $\mathbb{C}$.

1.3. Các đơn vị ảo trong $\mathbb{C}_3$ và dạng đại số của số phức mở rộng

Trong $\mathbb{C}_3$ ta xét các số phức mở rộng sau, gọi là các đơn vị ảo:

$$i = (0,1,0) \text{ (\textit{cũng là đơn vị ảo trong trường} } \mathbb{C})$$

$$j = (0,0,1)$$

Dễ thấy:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -1 \\ i.j = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$\forall z = (a, b, c) \in \mathbb{C}_3$:

$$z = (a, 0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \equiv a + bi + cj$$

$\mathbb{C}_3 = \{\, a + bi + cj\ / a, b, c \in \mathbb{R}\,\}$ là tập hợp các số phức mở rộng với các phép toán như đã nêu.

Việc tính toán trên $\mathbb{C}_3$ là mở rộng của việc tính toán trên $\mathbb{C}$ với lưu ý $(*)$.

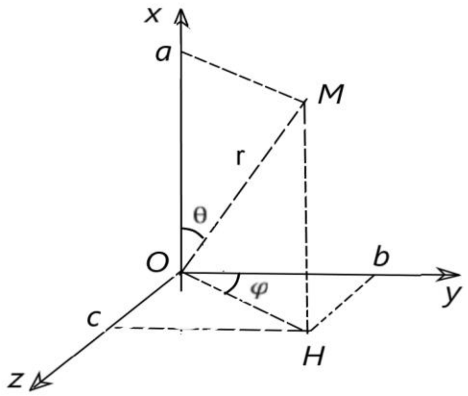
Ví dụ: $z_1 = 3 + 4i - 5j,\ z_2 = 7 + 6i \in \mathbb{C}_3$ thì:

$z_1\, z_2 = (3 + 4i - 5j).(7 + 6i) = 21 - 24 + 18i + 28i - 35j = -3 + 46i - 35j$

$iz_1 - j\, z_2 = i(3 + 4i - 5j) - j(7 + 6i) = -4 + 3i - 7j$

1.4. Biểu diễn hình học và dạng lượng giác của số phức mở rộng

Xét không gian với hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz. Mỗi $z = a + bi + cj \in \mathbb{C}_3$ có biểu diễn hình học là điểm có tọa độ (a, b, c), ta có thể đồng nhất z với điểm biểu diễn của nó.



Với $z = a + bi + cj \in \mathbb{C}_3$ có biểu diễn hình học là $\mathrm{M(a, b, c)}$.

- Mô đun của z là: $r = |z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

-Số phức liên hợp của z là: $\overline{z} = a - bi - cj$

Rõ ràng: $\mathrm{z}.\overline{\mathrm{z}} = |\mathrm{z}|^2$

$\overline{z_1 z_2} \equiv \overline{z_1}.\overline{z_2} \quad (\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}_3)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $\mathrm{M(a, b, c)}$ xuống mặt phẳng Oyz. Gọi φ là số đo góc định hướng từ tia Oy đến tia OH. Gọi θ là số đo góc tạo bởi tia các OM và Ox.

Ta dễ dàng thấy:

$$\begin{cases} a = rcos\theta \\ b = rcos\varphi.sin\theta \\ c = rsin\varphi.sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

Do đó: $z = a + bi + cj = r(cos\theta + icos\varphi.sin\theta + jsin\varphi.sin\theta)$

Nếu có sự biểu diễn $z = r(cos\theta + icos\varphi.sin\theta + jsin\varphi.sin\theta)$ *với* $r \geq 0$ và $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$; thì ta gọi đó là biểu diễn lượng giác của z.

2. Tính chất của các phép toán trên $\mathbb{C}_3$

2.1. Mệnh đề 1. $(\mathbb{C}_3, +)$ *là một nhóm giao hoán.*

Chứng minh. Dễ dàng.

2.2. Mệnh đề 2. *Phép nhân trên* $\mathbb{C}_3$ *thoả mãn:*

a. Tính giao hoán:

$$z_1.z_2 \equiv z_2.z_1$$

b.Tính phân phối:

$$z_3.(z_1 + z_2) \equiv z_3.z_1 + z_3.z_2$$

Chứng minh. Tính giao hoán là hiển nhiên, ta chỉ cần chứng minh tính phân phối.

$\forall z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j;\ \forall z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j;\ \forall z_3 = a_3 + b_3 i + c_3 j \in \mathbb{C}_3$:

$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (\ b_1 + b_2)i + (\ c_1 + c_2)j$

$$\begin{aligned} z_3.(z_1 + z_2) &= a_3(a_1 + a_2) - b_3(b_1 + b_2) - c_3(c_1 + c_2) \\ &\quad + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + b_3 a_1 + b_3 a_2)i + (a_3 c_1 + a_3 c_2 + c_3 a_1 + c_3 a_2)j \qquad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$z_3.z_1 = a_3 a_1 - b_3 b_1 - c_3 c_1 + (a_3 b_1 + a_1 b_3)i + (a_3 c_1 + a_1 c_3)j$ (2)

$z_3.z_2 = a_3 a_2 - b_3 b_2 - c_3 c_2 + (a_3 b_2 + a_2 b_3)i + (a_3 c_2 + a_2 c_3)j$ (3)

Từ (1)(2) và (3) ta có điều cần chứng minh ■

Với $z = a + bi + cj \in \mathbb{C}_3$ ta kí hiệu a là $Re(z)$ và gọi đó là phần thực của z.

2.3. Mệnh đề 3. *Với $z \in \mathbb{C}_3$ có $Re(z) \neq 0$ thì luôn tồn tại duy nhất phần tử nghịch đảo của z xác định bởi:*

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \qquad (*)$$

Chứng minh. Dễ dàng.

Chú ý: *Trường hợp $Re(z) = 0$ và $z = bi + cj \neq 0$ thì z có vô số phần tử nghịch đảo z^* xác định bởi:*

$$z^* = z^{-1} + (ci - bj)t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Trong đó z^{-1} là kí hiệu cho phần tử nghịch đảo xác định bởi (*).

Nhận xét: Trên $\mathbb{C}_3$ ta có thể đề cập đến phép chia. Với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_3$, $Re(z_1) \neq 0$ thì:

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 z_1^{-1}$$

Với $z \in \mathbb{C}_3, Re(z) \neq 0$; n là số nguyên âm thì: $z^n = (z^{-1})^{-n}$ và $z^0 = 1$.

2.4. Mệnh đề 4. *Với $z_k = a_k + b_k i + c_k j \in \mathbb{C}_3$ $(k = \overline{1;3})$ thì:*

$$(z_3 z_2)z_1 - z_3(z_2 z_1) = (b_3 c_1 - b_1 c_3)(ic_2 - jb_2)$$

Chứng minh. Ta có:

$z_3.z_2 = a_3a_2 - b_3b_2 - c_3c_2 + (a_3b_2 + a_2b_3)i + (a_3c_2 + a_2c_3)j$

$\Rightarrow (z_3.z_2)z_1 = a_1(a_3a_2 - b_3b_2 - c_3c_2) - b_1(a_3b_2 + a_2b_3) - c_1(a_3c_2 + a_2c_3) + (b_1a_3a_2 - b_1b_3b_2 - b_1c_3c_2 + a_1a_3b_2 + a_1a_2b_3)i + (c_1a_3a_2 - c_1b_3b_2 - c_1c_3c_2 + a_1a_3c_2 + a_1a_2c_3)j$ (1)

$z_2.z_1 = a_2a_1 - b_2b_1 - c_2c_1 + (a_2b_1 + a_1b_2)i + (a_2c_1 + a_1c_2)j$

$\Rightarrow z_3(z_2.z_1) = a_3(a_2a_1 - b_2b_1 - c_2c_1) - b_3(a_2b_1 + a_1b_2) - c_3(a_2c_1 + a_1c_2) + (b_3a_1a_2 - b_3b_1b_2 - b_3c_1c_2 + a_3a_2b_1 + a_3a_1b_2)i + (c_3a_1a_2 - c_3b_1b_2 - c_3c_1c_2 + a_3a_2c_1 + a_3a_1c_2)j$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned}(z_3.z_2)z_1 - z_3(z_2.z_1) &= (-b_1c_3 + b_3c_1)c_2 i + (-c_1b_3 + c_3b_1)b_2 j \\ &= (b_3c_1 - b_1c_3)(ic_2 - jb_2)\end{aligned}$$ ■

Nhận xét: Nếu trong ba số $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_3$ có ít nhất một số thực thì rõ ràng:

$$(z_3 z_2)z_1 = z_3(z_2 z_1)$$

Ta có thể xem mỗi số phức mở rộng là một vectơ trong $\mathbb{R}^3$, vì thế ta có thể đề cập đến tích vô hướng của chúng. Với $z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j$, $z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j \in \mathbb{C}_3$ thì có tích vô hướng là:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

2.5. Mệnh đề 5. *Với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_3$ thì:*

$$\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1 = 2\langle z_1, z_2 \rangle$$

Chứng minh. Với $z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j$, $z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j \in \mathbb{C}_3$:

$\overline{z_1}z_2 = a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1 + (-a_2b_1 + a_1b_2)i + (-a_2c_1 + a_1c_2)j$

$\overline{z_2}z_1 = a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1 + (a_2b_1 - a_1b_2)i + (a_2c_1 - a_1c_2)j$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh ■

2.6. Mệnh đề 6. *Với* $z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j,\ z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j \in \mathbb{C}_3$ *thì:*

$$|z_1|^2|z_2|^2 - |z_1 z_2|^2 = (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2$$

Do đó $|z_1 z_2| \le |z_1||z_2|$, *dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi* $b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$.

Chứng minh. Dễ dàng.

Kết quả sau đây là sự mở rộng của một công thức quen thuộc trong trường $\mathbb{C}$:

2.7. Mệnh đề 7. (Mở rộng của công thức Moivre)

Cho $z = r(cos\theta + icos\varphi.sin\theta + jsin\varphi.sin\theta)$ *là số phức mở rộng viết ở dạng lượng giác. Với mọi số nguyên n, ta luôn có (với điều kiện* $Re(z) \neq 0$ *khi* $n < 0$*):*

$$z^n = r^n[cos(n\theta) + icos\varphi.sin(n\theta) + jsin\varphi.sin(n\theta)] \qquad (**)$$

Chứng minh. Trước tiên ta dùng quy nạp theo n, chứng minh (**) đúng với mọi số tự nhiên. Rõ ràng (**) đúng với $n = 0$.

Giả sử (**) đúng với số tự nhiên n, ta có:

$z^{n+1} = z^n.z$

$= r^{n+1}[cos(n\theta) + icos\varphi.sin(n\theta) + jsin\varphi.sin(n\theta)](cos\theta + icos\varphi.sin\theta + jsin\varphi.sin\theta)$

$= r^{n+1}[cos(n\theta)cos\theta - sin(n\theta)sin\theta + i(cos(n\theta)cos\varphi sin\theta + cos\varphi\ sin(n\theta)cos\theta) + j(cos(n\theta)sin\varphi sin\theta + cos\theta sin\varphi\ sin(n\theta)]$

$= r^{n+1}[cos((n+1)\theta) + icos\varphi.sin((n+1)\theta) + jsin\varphi.sin((n+1)\theta)]$

Vậy (**) đúng với mọi số nguyên không âm.

Trường hợp $n < 0, Re(z) \neq 0$:

$z^n = (z^{-1})^{-n} = \{r^{-1}[cos\theta + icos\varphi.sin(-\theta) + jsin\varphi.sin(-\theta)]\}^{-n}$

$= r^n[cos(n\theta) + icos\varphi.sin(n\theta) + jsin\varphi.sin(n\theta)]$ ■

Ví dụ: Với $z = 2 + \sqrt{3}i - 3j$ thì:

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = 4$$

$$rcos\theta = a \Rightarrow cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2 + \sqrt{3}i - 3j = 4(cos\frac{\pi}{3} + i\frac{1}{2}sin\frac{\pi}{3} - j\frac{\sqrt{3}}{2}sin\frac{\pi}{3})$$

Với mọi $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = \left(2 + \sqrt{3}i - 3j\right)^n = 4^n(cos\frac{n\pi}{3} + i\frac{1}{2}sin\frac{n\pi}{3} - j\frac{\sqrt{3}}{2}sin\frac{n\pi}{3}).$$

Nhận xét: Tương tự như trong trường $\mathbb{C}$, từ mệnh đề trên ta có thể đề cập đến căn bậc n của những số phức mở rộng. Vấn đề này sẽ được đề cập sâu hơn ở một bài viết khác.

3. Toán tử ma trận của số phức mở rộng, các trường chứa trong $\mathbb{C}_3$

Từ các mệnh đề nêu trên ta thấy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}_3$. Đáng tiếc là $\mathbb{C}_3$ không phải là trường do thiếu tính kết hợp của phép nhân (xem **mệnh đề 4)**, điều đó gây khó khăn khi giải các phương trình trong $\mathbb{C}_3$.

Chúng ta tìm hiểu bài toán với phương trình đơn giản:

Bài toán. Cho $a, b \in \mathbb{C}_3$. Hãy tìm $z \in \mathbb{C}_3$ sao cho $az = b$.

Để giải phương trình đó và các phương trình khác trong $\mathbb{C}_3$, chúng tôi đề ra khái niệm sau:

3.1. Toán tử ma trận của số phức mở rộng

Tùy theo trường hợp cụ thể, mỗi số phức mở rộng ta có thể xem là vectơ hay một ma trận cột.

Cho $a = a_1 + a_2 i + a_3 j \in \mathbb{C}_3$ và $b = b_1 + b_2 i + b_3 j \in \mathbb{C}_3$ thì rõ ràng:

$$a.b = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ta kí hiệu: $M_a = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ và gọi đó toán tử ma trận của a.

Rõ ràng ta có:

$$a.b = M_a.b = M_b.a$$
$$det(M_a) = a_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

Trở lại với bài toán trên, tìm $z \in \mathbb{C}_3$ sao cho $az = b$.

Nếu $a = a_1 + a_2 i + a_3 j$ có $Re(a) = a_1 \neq 0$ (tức là $\det(M_a) \neq 0$) thì:

$$az = b \Leftrightarrow M_a z = b \Leftrightarrow z = (M_a)^{-1} b$$

Ví dụ: Giải phương trình $(3 + 5i - 4j)z = 7 + i - 2j$

Phương trình trên tương đương với:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 17 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{17}{25} - \frac{4}{5}i + \frac{6}{25}j.$$

Nếu $a = a_1 + a_2 i + a_3 j$ có $Re(a) = a_1 = 0$ thì sao? Vấn đề này sẽ được đề cập trong mục tiếp theo.

3.2. Các trường chứa trong $\mathbb{C}_3$

Xét không gian với hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz. Ta có thể chỉ ra vô số trường chứa trong $\mathbb{C}_3$, tương ứng là những mặt phẳng chứa trục Ox.

Mệnh đề 8. *Tập hợp các số phức cùng nằm trong một mặt phẳng bất kì chứa trục Ox là bộ phận đóng kín với hai phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{C}_3$. Tập hợp đó cùng với các phép toán cảm sinh (từ các phép toán trên $\mathbb{C}_3$) là trường.*

Chứng minh. Với $s = (a, b, c) \in \mathbb{C}_3$ và $s \notin Ox$.

$H = mp(s, Ox) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}_3 \ / \ cy - bz = 0\}$ là mặt phẳng chứa Ox và s.

$\forall s_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j,\ \forall s_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j \in H$:

$$\begin{cases} cb_1 - bc_1 = 0 \\ cb_2 - bc_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c(a_2 b_1 + a_1 b_2) = ba_2 c_1 + ba_1 c_2 = b(a_2 c_1 + a_1 c_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c(a_2 b_1 + a_1 b_2) = ba_2 c_1 + ba_1 c_2 = b(a_2 c_1 + a_1 c_2) \\ c(b_1 + b_2) = bc_1 + bc_2 = b(c_1 + c_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1.s_2 \in H \\ s_1 + s_2 \in H \end{cases}$$

$\forall s_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j \in H,\ s_1 \neq 0$:

$$cb_1 - bc_1 = 0 \Rightarrow s_1^{-1} = \frac{1}{|s_1|^2}(a_1 - b_1 i - c_1 j) \in H$$

Mặt khác:

$\forall s_k = a_k + b_k i + c_k j \in H \ \ (k = \overline{1..3})$:

$$\begin{cases} cb_1 - bc_1 = 0 \\ cb_3 - bc_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(b_3c_1 - b_1c_3) = bc_3c_1 - bc_1c_3 = 0 \\ b(b_3c_1 - b_1c_3) = cb_3b_1 - cb_1b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_3c_1 - b_1c_3 = 0$$

Áp dụng **mệnh đề 4** ta có:

$(s_3s_2)s_1 - s_3(s_2s_1) = (b_3c_1 - b_1c_3)(ic_2 - jb_2) = 0 \Rightarrow (s_3s_2)s_1 = s_3(s_2s_1)$

Tức là phép nhân trên H có tính kết hợp , suy ra điều cần chứng minh ■

Ta gọi những trường được chỉ ra trong mệnh đề trên là ***"trường phẳng qua Ox"***. Trường số phức $\mathbb{C}$ nằm trong vô số các trường đó, ứng với mặt phẳng Oxy.

Nhận xét: Trở lại với câu hỏi tìm nghiệm $z \in \mathbb{C}_3$ của phương trình sau:

$$(a_2i + a_3j)z = b_1 + b_2i + b_3j \qquad (a_2^2 + a_3^2 \neq 0)$$

Nếu phương trình có nghiệm $z = x_1 + x_2i + x_3j$ thì:

$$\begin{cases} b_2 = a_2x_1 \\ b_3 = a_3x_1 \end{cases} \Rightarrow a_2b_3 = a_3b_2$$

$\Rightarrow a = a_2i + a_3j$ và $b = b_1 + b_2i + b_3j$ cùng thuộc một trường phẳng qua Ox.

Ngược lại, nếu $a = a_2i + a_3j$ và $b = b_1 + b_2i + b_3j$ cùng thuộc một trường phẳng qua Ox (tức là $a_2b_3 = a_3b_2$) thì phương trình có vô số nghiệm, tạo thành nghiệm tổng quát:

$$z = (a_2i + a_3j)^{-1}(b_1 + b_2i + b_3j) + (a_3i - a_2j)t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Ví dụ: Phương trình $(2i - 5j)z = 1 - 4i + 7j$ vô nghiệm

Phương trình $(2i - 5j)z = 1 - 4i + 10j$ có nghiệm riêng:

$$z_0 = (2i - 5j)^{-1}(1 - 4i + 10j) = \frac{1}{29}(-2i + 5j)(1 - 4i + 10j) = \frac{1}{29}(-58 - 2i + 5j)$$

Và nghiệm tổng quát là:

$$z = \frac{1}{29}(-58 - 2i + 5j) + (5i + 2j)t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Kết luận.

$\mathbb{C}_3$là sự mở rộng của các trường $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$. Lấy cảm hứng từ trường số phức, chúng tôi đã xây dựng được một loạt tính chất liên quan (ở mục II), trong đó có những công thức thú vị như công thức **Moivre mở rộng**. Chúng tôi cũng đưa ra khái niệm **toán tử ma trận của số phức mở rộng** và áp dụng, đồng thời chỉ ra một lớp các trường nằm trong $\mathbb{C}_3$ mà trường $\mathbb{C}$ nằm trong lớp đó ❑

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Nguyễn Hữu Điển (2000). *Phương pháp số phức và hình học phẳng.* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia.

Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Nho (2002). *40 năm Olympic Toán học Quốc tế.* Nhà xuất bản Giáo dục.

Đoàn Quỳnh (2008). *Giải tích 12 nâng cao.* Nhà xuất bản Giáo dục.

T. Andreescu, D. Andrica (2006). *Complex Numbers From A to ... Z.* Birkhäuser (Switzerland).